

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1. ĐỊNH MỀM GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Dạng 1: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[\alpha; \beta]} y = a$ ($a > 0$).

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = K$; $\min_{[\alpha; \beta]} f(x) = k$ ($K > k$).

$$\text{Kiểm tra } \max\{|m+K|, |m+k|\} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K-m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}.$$

$$\text{TH1: } \frac{|K-k|}{2} \leq a. \text{ Để } \max_{[\alpha; \beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}.$$

$$\text{TH2: } \frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Cách 2: Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \text{Max} = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \text{Max} = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$$

Dạng 2: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\min_{[\alpha; \beta]} y = a$ ($a > 0$).

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = K$; $\min_{[\alpha; \beta]} f(x) = k$ ($K > k$).

$$\text{Đề } \min_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k=a \\ m+k>0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K=-a \\ m+K<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=a-k \\ m>-k \end{cases} \vee \begin{cases} m=-a-K \\ m<-K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

Dạng 3: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[\alpha;\beta]} y$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K > k)$.

$$\text{Đề } \max_{[\alpha;\beta]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

Dạng 4: Tìm m để $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \ (K > k)$.

Đề

$$\min_{[\alpha;\beta]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$$

Dạng 5: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[a;b]} y$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là $\frac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\min_{[a;b]} y$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$. Đề hỏi tìm min của $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[a;b]} y \leq h, \min_{[a;b]} y (h > 0)$ hoặc $\text{Min} + \text{max} =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k)$.

$$\text{TH1: } |K+m| \leq h|k+m| \xrightarrow[\text{K+m cùng dấu k+m}]{|K+m| \geq |k+m|} m \in S_1.$$

$$\text{TH2: } |k+m| \leq h|K+m| \xrightarrow[\text{K+m cùng dấu k+m}]{|k+m| \geq |K+m|} m \in S_2.$$

Vậy $m \in S_1 \cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k)$.

BT1: Tìm m để $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m+K| + |m+k| = \alpha$.

BT2: Tìm m để $\min_{[a;b]} y^* \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m+K| \cdot |m+k| = \beta$.

Câu 1: Giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất là

Lời giải

ĐS: $m = \frac{1}{2}$

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có $f(0) = 2m - 1$, $f(1) = 2m - 3$ và $f(2) = 2m + 1$

Suy ra $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|2m-1|; |2m-3|; |2m+1|\} = \max\{|2m-3|; |2m+1|\} = P$.

Trường hợp 1: Xét $|2m-3| \geq |2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = |2m-3| \geq 2, \forall m \leq \frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m-3| < |2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = |2m+1| > 2, \forall m > \frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}$ không tồn tại.

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5 là

Lời giải

ĐS: -2

Ta có $y' = \frac{2x-2}{x^2-2x+m}, y' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\{y(-1), y(2), y(1)\} = 5$.

$\Leftrightarrow \max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5$.

+ Trường hợp $m \geq -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |3+m| = 5 \Rightarrow m = 2$.

+ Trường hợp $m < -1$ ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |m-1| = 5 \Rightarrow m = -4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2 .

Câu 3: Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$ (a là tham số). Giá trị của tham số a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất là

Lời giải

ĐS: $a = 3$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

$$\text{Ta có: } y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5| \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = (x+1)^2, \quad x \in [-2;1] \Rightarrow t \in [0;4].$$

Lúc đó hàm số trở thành: $f(t) = |t + a - 5|$ với $t \in [0;4]$.

$$\text{Nên } \max_{x \in [-2;1]} y = \max_{t \in [0;4]} f(t) = \max_{t \in [0;4]} \{f(0); f(4)\} = \max_{t \in [0;4]} \{|a-5|; |a-1|\}$$

$$\geq \frac{|a-1| + |a-5|}{2} \geq \frac{|a-1+5-a|}{2} = 2$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } |a-1| = |a-5| = 2 \Leftrightarrow a = 3.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\max_{t \in [0;4]} f(t)$ là 2 khi $a = 3$.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 2

$$\text{Xét } y = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}. \text{ Ta có: } f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1;2] \\ x = -2 \notin [1;2] \end{cases}.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{2m+1}{2}, f(2) = \frac{3m+4}{3} \Rightarrow \max_{x \in [1;2]} y = \left\{ \left| \frac{2m+1}{2} \right|; \left| \frac{3m+4}{3} \right| \right\}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } \max_{x \in [1;2]} y = \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Với } m = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{17}{6} > 2$$

$$\bullet \text{ Với } m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{7}{6} < 2$$

$$\text{Trường hợp 2: } \max_{x \in [1;2]} y = \left| \frac{3m+4}{3} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3m+4=6 \\ 3m+4=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ m=-\frac{10}{3} \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Với } m = \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{7}{6} < 2$$

$$\bullet \text{ Với } m = -\frac{10}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{17}{6} > 2$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 5: Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

Lời giải

$$\text{ĐS: } a + 2b = -2 + 2 \cdot (-1) = -4$$

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b|$$

$$\geq |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2.$$

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

$$M \text{ là giá trị lớn nhất của hàm số } f(x) \text{ trên } [-1; 3] \Rightarrow M = \max \{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Ta có: } a + 2b = -4.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Lời giải

$$\text{ĐS: } 18$$

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3; -1]$ ta có: $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

Do đó $A = \max_{[-3; -1]} u = u(-1) = 26 - m^2$; $a = \min_{[-3; -1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$.

Do $M = \max_{[-3; -1]} y = \max \{|26 - m^2|, |6 - 3m^2|\}$ và $4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72$.

Vậy $M \geq 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $|26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 7: Số giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4 là

Lời giải

ĐS : $2; m \in \{1; 5\}$

$f(x) = x^2 + 2x + m - 4$ có $f'(x) = 2x + 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Do đó

$$\max_{[-2; 1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max \{|m - 1|; |m - 4|; |m - 5|\}.$$

Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$, suy ra $\max_{[-2; 1]} y$ chỉ có thể là $|m - 5|$ hoặc $|m - 1|$.

$$\text{Nếu } \max_{[-2; 1]} y = |m - 5| \text{ thì } \begin{cases} |m - 5| = 4 \\ |m - 5| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Nếu } \max_{[-2; 1]} y = |m - 1| \text{ thì } \begin{cases} |m - 1| = 4 \\ |m - 1| \geq |m - 5| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{1; 5\}$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: 105; $m \in \{0; 1; 2; \dots; 14\}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có } g'(x) = x^3 - 19x + 30; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$			$g(0)$	$g(2)$		

$$g(0) = m - 20; \quad g(2) = m + 6.$$

$$\text{Để } \max_{[0;2]} |g(x)| \leq 20 \text{ thì } \begin{cases} g(0) \leq 20 \\ g(2) \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 20| \leq 20 \\ |m + 6| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 14.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; \dots; 14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 9: Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \geq 2m$?

Lời giải

ĐS: 14

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x^4 + ax + a}{x+1} = \frac{x^4}{x+1} + a.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên suy ra } M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\} \text{ và } m = \min \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}.$$

$$\text{Trường hợp 1. } a + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{16}{3} \right| = a + \frac{16}{3} \\ m = \left| a + \frac{1}{2} \right| = a + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Trường hợp 2. } a + \frac{16}{3} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{1}{2} \right| = -a - \frac{1}{2} \\ m = \left| a + \frac{16}{3} \right| = -a - \frac{16}{3} \end{cases}.$$

$$M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(-a - \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}.$$

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 3. } \begin{cases} a + \frac{1}{2} < 0 \\ a + \frac{16}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} < a < -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Nếu } \left| a + \frac{1}{2} \right| > \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} > a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{35}{12} \text{ thì}$$

$$\begin{cases} M = -a - \frac{1}{2} \\ m = a + \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(a + \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \leq -\frac{67}{18}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3} < a \leq -\frac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Nếu } \left| a + \frac{1}{2} \right| \leq \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a \geq -\frac{35}{12} \text{ thì}$$

$$\begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = -a - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2 \left(-a - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{19}{9}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9} \leq a < -\frac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

Lời giải

ĐS: 136

Đặt $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0; 2]$.

Với mọi $x \in [0; 2]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra $\max_{[0; 2]} |f(x)| = \max \{ |f(0)|; |f(2)| \}.$

$$\begin{aligned} \text{Theo đề } \max_{[0;2]} |f(x)| \leq 30 &\Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \leq 30 \\ |m+14| \leq |m-30| \\ |m+14| \leq 30 \\ |m-30| \leq |m+14| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \leq 30 \\ |m+14| \leq 30 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -30 \leq m-30 \leq 30 \\ -30 \leq m+14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 60 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16. \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0; 1; 2; \dots; 16\}$. Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

Câu 11: Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$?

Lời giải.

ĐS: 2

$$\text{Đặt } y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a| = |f(x)|.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}.$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2] \text{ và } f(1) = a; f(2) = a + 4$$

$$\text{Ta có } \forall x \in [1; 2] \text{ thì } \begin{cases} \max y \in \{|a|, |a+4|\} \\ \min y \in \{|a|, 0, |a+4|\} \end{cases}.$$

Xét các trường hợp

$$+ a \geq 0 \Rightarrow \max y = a + 4; \min y = a \Rightarrow 2a + 4 = 10 \Rightarrow a = 3, \text{ nhận.}$$

$$+ a \leq -4 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a - 4 \Rightarrow -a - 4 - a = 10 \Rightarrow a = -7, \text{ nhận.}$$

$$+ \begin{cases} a < 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \{a + 4; -a\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 10 \\ -a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -10 \end{cases}.$$

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 12: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$ trên $[0; 3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m .

Lời giải

ĐS: 6

Có $\max_{[0;3]} f(x) = 60 \Leftrightarrow f(x) \leq 60, \forall x \in [0;3]$ và $\exists x_0 \in [0;3]$ sao cho $f(x_0) = 60$.

$$\text{Có } f(x) \leq 60 \Leftrightarrow |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x \leq 60 \Leftrightarrow |2x^3 - 15x + m - 5| \leq 60 - 9x$$

$$\Leftrightarrow 9x - 60 \leq 2x^3 - 15x + m - 5 \leq 60 - 9x \Leftrightarrow -2x^3 + 24x - 55 \leq m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0;3].$$

$$\text{Có } -2x^3 + 6x + 65 \geq 29, \forall x \in [0;3] \text{ nên } m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0;3] \Leftrightarrow m \leq 29.$$

$$\text{Tương tự } -2x^3 + 24x - 55 \leq -23 \text{ nên } -2x^3 + 24x - 55 \leq m, \forall x \in [0;3] \Leftrightarrow m \geq -23.$$

$$\text{Vậy } -23 \leq m \leq 29 \text{ thì } f(x) \leq 60, \forall x \in [0;3].$$

$$\text{Để } \exists x_0 \in [0;3] \text{ sao cho } f(x_0) = 60 \text{ thì } \begin{cases} -2x^3 + 24x - 55 = m \\ -2x^3 + 6x + 65 = m \end{cases} \text{ có nghiệm trên } [0;3].$$

$$\text{Hay } \begin{cases} m \geq 29 \\ m \leq -23 \end{cases}. \text{ Vậy } \begin{cases} m = 29 \\ m = -23 \end{cases} \text{ thì } \max_{[0;3]} f(x) = 60.$$

Khi đó tổng các giá trị của m là $29 - 23 = 6$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10$. Số phần tử của S là?

Lời giải

ĐS: 2

$$\text{Đặt } g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1	0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$m+4$							

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của

$$f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|. \text{ Ta có các trường hợp sau:}$$

Trường hợp 1: $m \geq 0$. Bảng biến thiên của $f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$		$m+\frac{1}{16}$		$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow m + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 3$

Trường hợp 2: $m < 0 < m + \frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} < m < 0$. Bảng biến thiên:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$		$m+\frac{1}{16}$		$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6$

Trường hợp 3: $m + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6$$

Trường hợp 4: $m + \frac{1}{16} < 0 < m + 4 \Leftrightarrow -4 < m < -\frac{1}{16}$. Bảng biến thiên:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$		$-m-\frac{1}{16}$		$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} \min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \\ \min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + m + 4 = 10 \\ 0 + (-m) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -10 \end{cases}$

Trường hợp 5: $m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$. Ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 - m = 10 \Leftrightarrow m = -10$$

Trường hợp 6: $m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$. Ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow -m - m - 4 = 10 \Leftrightarrow m = -7$$

Vậy $m \in \{-7; 3\}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

Lời giải

ĐS: 4002

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f(1) = m - 1; f(2) = m - 3; f(4) = 17 + m.$$

$$\max_{[1;4]} f(x) = m + 17; \min_{[1;4]} f(x) = m - 3.$$

+Nếu $m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max_{[1;4]} |f(x)| = m + 17$, $\min_{[1;4]} |f(x)| = m - 3$. Khi đó:

$$\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow 17 + m \leq 3(m - 3) \Leftrightarrow m \geq 13.$$

+Nếu $m + 17 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -17$ thì $\max_{[1;4]} |f(x)| = -m + 3$, $\min_{[1;4]} |f(x)| = -17 - m$.

Khi đó: $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow -m + 3 \leq 3(-17 - m) \Leftrightarrow m \leq -27$.

+Nếu $(m - 3)(m + 17) < 0 \Leftrightarrow -17 < m < 3$ thì

$$\max_{[1;4]} |f(x)| = \max\{|m + 17|, |m - 3|\} = \max\{m + 17, 3 - m\} > 0; \min_{[1;4]} |f(x)| = 0.$$

Khi đó, không thỏa điều kiện $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$.

Do đó: $\begin{cases} m \leq -27 \\ m \geq 13 \end{cases}$ kết hợp với $m \in [-2020; 2020]$ ta có $m \in [-2020; -27] \cup [13; 2020]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

DẠNG 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM ẨN, HÀM HỢP

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$					
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		-3		5		$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(4x - x^2\right) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

Lời giải

ĐS: 12

$$g'(x) = (4-2x)f'(4x-x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2-x)[2f'(4x-x^2) + 4-x].$$

Với $x \in [1;3]$ thì $4-x > 0$; $3 \leq 4x-x^2 \leq 4$ nên $f'(4x-x^2) > 0$.

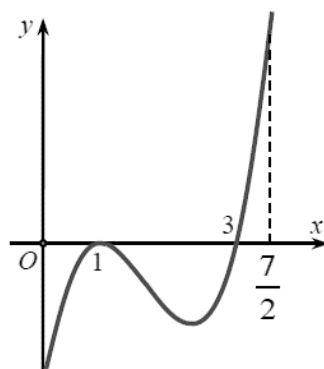
Suy ra $2f'(4x-x^2) + 4-x > 0$, $\forall x \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'	+	0	-
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

Lời giải

ĐS: $x_0 = 3$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ như sau:

x	0	1	3	$\frac{7}{2}$		
$f'(x)$		-	0	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$			$f(3)$		$f\left(\frac{7}{2}\right)$

Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 3$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$			5		$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$

Lời giải

ĐS: 12

Ta có $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$

Xét thấy " $x \in [1; 3] \Rightarrow 3 \leq 4x - x^2 \leq 4 \Rightarrow f(4x - x^2) > 0$ "

Mặt khác $\frac{4-x}{2} > 0 \Rightarrow x \in [1; 3]$

Suy ra $g(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

$$g(1) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{17}{3} = 5 + \frac{17}{3} = \frac{32}{3}$$

$$g(3) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{19}{3} = 5 + \frac{19}{3} = \frac{34}{3}$$

$$g(2) = 5 + 7 = 12.$$

$$\Rightarrow g(1) < g(3) < g(2)$$

Vậy $\max_{[1;3]} g(x) = 12$ tại $x = 2$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét hàm số $g(x) = f(3x-1) + m$

. Giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$ là

Lời giải

ĐS: $m = -13$

Đặt $u = 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) + m$.

$$x \in [0;1] \Rightarrow u \in [-1;2].$$

Do $f(x)$ liên tục trên $\square$ nên $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[-1;2]} (f(u) + m) = \max_{[-1;2]} f(u) + m = 3 + m.$

$$\text{Để } \max_{[0;1]} g(x) = 10 \Leftrightarrow m = -13.$$

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

Lời giải

ĐS: $m = 3$

Đặt $t = x^3 + x$. Vì $x \in [0;2] \Rightarrow t \in [0;10]$.

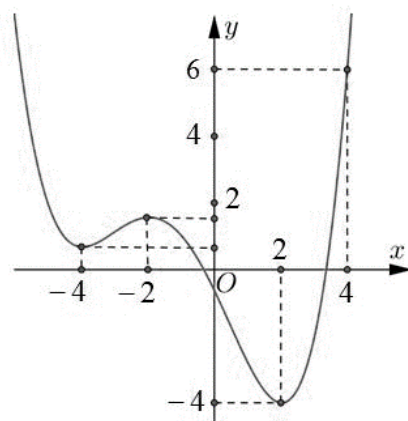
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \max_{x \in [0;2]} g(x) &= \max_{x \in [0;2]} [f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m] \leq \max_{x \in [0;2]} f(x^3 + x) + \max_{x \in [0;2]} [-x^2 + 2x + m] \\ &= \max_{t \in [0;10]} f(t) + 1 + m. \end{aligned}$$

$$\leq \max_{x \in [0;10]} f(x) + 1 + m = 4 + 1 + m = 5 + m.$$

$$\text{Suy ra: } \max_{x \in [0;2]} g(x) = 5 + m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \max_{x \in [0;2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$, có đồ thị như hình vẽ



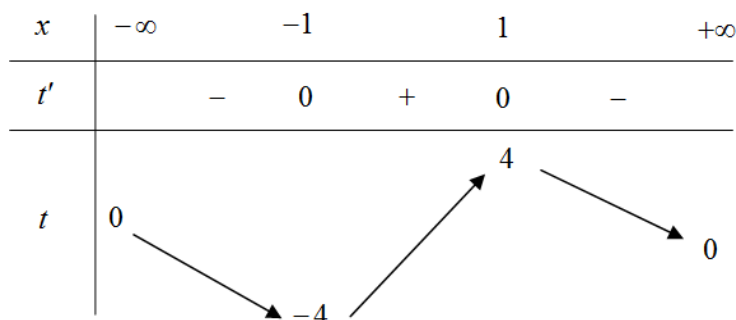
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2 + 1}\right) + m - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

Lời giải

ĐS: 4031

$$\text{Đặt } t = \frac{8x}{x^2 + 1}. \text{ Ta có: } t' = \frac{-8x^2 + 8}{(x^2 + 1)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

BBT:



$$\Rightarrow t \in [-4; 4].$$

Hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ trở thành $g(t) = |f(t) + m - 1|, t \in [-4; 4]$.

Đặt $h(t) = f(t) + m - 1, t \in [-4; 4]$, ta có: $h'(t) = f'(t)$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \in [-4; 4] \\ t = -2 \in [-4; 4] \\ t = 2 \in [-4; 4] \end{cases}.$$

Ta có: $h(-4) \approx 0,8 + m - 1 = m - 0,2$;

$$h(4) = 6 + m - 1 = m + 5;$$

$$h(-2) \approx 1,6 + m - 1 = m + 0,6;$$

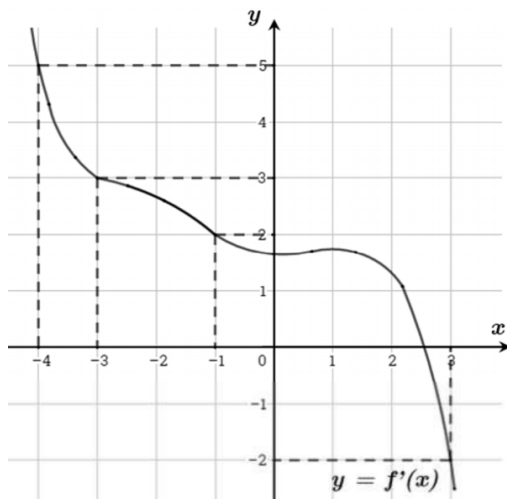
$$h(2) = -4 + m - 1 = m - 5.$$

$$\max_{t \in [-4; 4]} y = \max_{t \in [-4; 4]} |h(t)| = \max \{|m + 5|; |m - 5|\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} |m + 5| \leq 2020 \\ |m - 5| \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 \leq m + 5 \leq 2020 \\ -2020 \leq m - 5 \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2025 \leq m \leq 2015 \\ -2015 \leq m \leq 2025 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -2015 \leq m \leq 2015. \end{aligned}$$

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



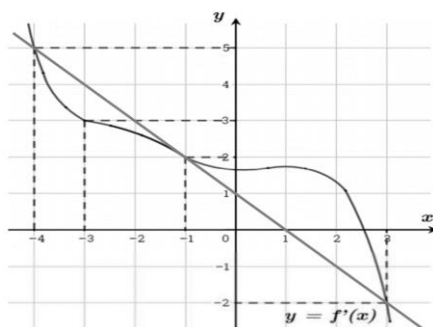
Lời giải

ĐS: $x = -1$

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên $[-4; 3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1-x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy $\min_{[-4; 3]} g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG GTLN-GTNN GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 22: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

ĐS: 1 giờ

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$, ($t > 0$).

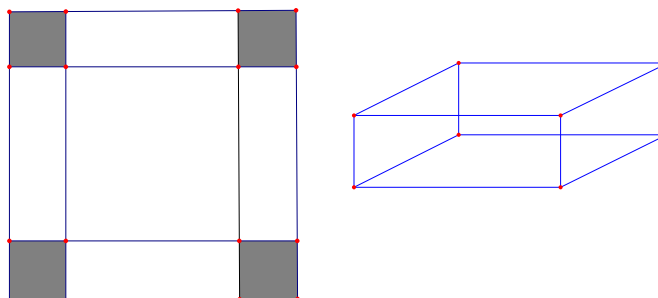
$$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}.$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}.$$

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Câu 23: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x , rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

ĐS: $x = 2$

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \forall x \in (0; 6)$

Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x) \cdot (12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$.

x	0			2			6			
y'		+			0			-		
y										

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.

Câu 24: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

Lời giải

ĐS: $\frac{112}{4 + \pi}$

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x (m)$

$\Rightarrow$ chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28 - x (m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: $R = \frac{28 - x}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{28 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784 - 56x + x^2}{4\pi}$

+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16} + \frac{784 - 56x + x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi + 4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$

Xét $f(x) = \left(\frac{\pi + 4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

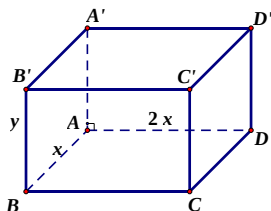
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi + 4)} = \frac{112}{\pi + 4}$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4 + \pi} m$

Câu 25: Ông A dự định sử dụng hết $5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Lời giải

ĐS: $1,01 m^3$



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

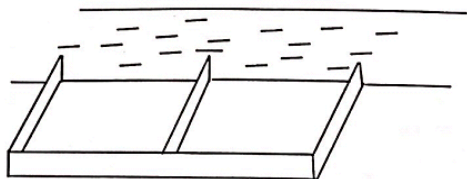
$$\Leftrightarrow y = \frac{5 - 2x^2}{6x}$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \frac{5 - 2x^2}{6x} = \frac{5x - 2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5 - 6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	$\nearrow \frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow 0$

$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01 m^3.$$

Câu 26: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



Lời giải

ĐS: $6250 m^2$

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E.

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).

$$\text{Số tiền phải làm là: } x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}.$$

$$\text{Diện tích đất: } S = x.y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

$$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50.$$

Bảng biến thiên:

x	0	50	$+\infty$
S'		0	
S	0	6250	$-\infty$

Vậy: $\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)}$ khi $x = 50$.

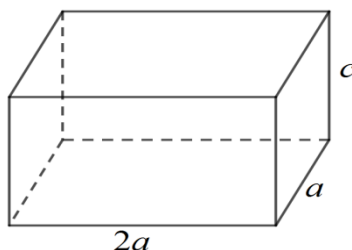
Câu 27: Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2 . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

Lời giải

ĐS: 108 triệu đồng

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là $a, 2a, c$ ($a(\text{m}) > 0, c(\text{m}) > 0$).



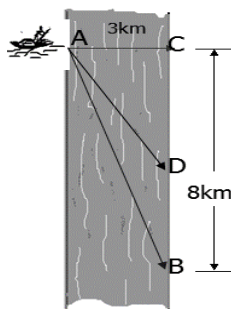
Ta có diện tích các mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

$$\text{Thể tích bể } V = a \cdot 2a \cdot c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}.$$

$$\text{Suy ra } S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3 \sqrt[3]{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} = 216.$$

Vậy $S_{\min} = 216 \text{ m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216 \cdot 500000 = 108 \text{ triệu đồng}$.

Câu 28: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km. Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8 \text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B.



Lời giải

$$\text{ĐS : } 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^{\text{h}}20'$$

○ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

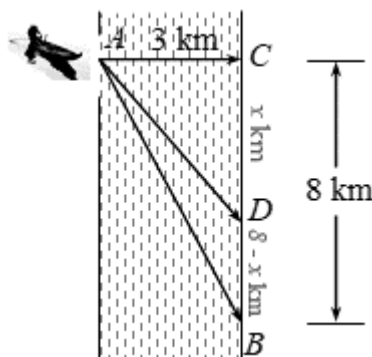
$$\text{Thời gian chèo thuyền trên quãng đường } AC : \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\text{Thời gian chạy trên quãng đường } CB : \frac{8}{8} = 1$$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $1,5$.

$$\text{○ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường } AB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \text{ mất } \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^{\text{h}}26'.$$

○ Cách 3:



Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD ; $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

$$\text{Thời gian chèo thuyền trên quãng đường } AD = \sqrt{x^2 + 9} \text{ là: } \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$$

$$\text{Thời gian chạy trên quãng đường } DB \text{ là: } \frac{8 - x}{8}$$

$$\text{Tổng thời gian di chuyển từ } A \text{ đến } B \text{ là } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8} \text{ trên khoảng } (0; 8)$$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: -3

Ta có: $y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x+m)^2} > 0, \forall x \neq -m$.

$$\text{Suy ra } \max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} y(4) = -1 \\ m \notin [0; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 = 0 \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Khi đó $S = \{-3\}$.

Tổng tất cả các phần tử của S bằng -3 .

Câu 30: Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Lời giải

ĐS: 18

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3; -1]$ ta có

$f'(x) = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x \in [-3; -1]$. Suy ra hàm số luôn đồng biến $\forall x \in [-3; -1]$

$$\min_{[-3;-1]} f(x) = f(-3) = 6 - 3m^2; \quad \max_{[-3;-1]} f(x) = f(-1) = 26 - m^2$$

Gọi M là giá trị lớn nhất của $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$.

$$M = \max_{[-3;-1]} \{ |26 - m^2|, |6 - 3m^2| \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \geq |26 - m^2| \\ M \geq |6 - 3m^2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3M \geq 3|26 - m^2| \\ M \geq |6 - 3m^2| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4M \geq |78 - 3m^2| + |6 - 3m^2|$$

$$\Rightarrow 4M \geq |78 - 3m^2| + |3m^2 - 6|$$

$$\Rightarrow 4M \geq 72 \Rightarrow M \geq 18$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow |26 - m^2| = |6 - 3m^2| \Leftrightarrow \begin{cases} 26 - m^2 = 6 - 3m^2 \\ 26 - m^2 = 3m^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = -10(l) \\ m^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng 18

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -1 ?

Lời giải

ĐS: 1; $m = -1$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x - 3m^2x^2 = 4x(x-1)(x+1) - 3m^2x^2 \leq 0$ với $\forall x \in [0; 1]$.

Suy ra $\max_{[0;1]} f(x) = f(0); \min_{[0;1]} f(x) = f(1)$.

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$f(0) \cdot f(1) = -1 \Rightarrow -m(-m^2 - m - 1) = -1 \Leftrightarrow m^3 + m^2 + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m^2+1) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 8. Tính tổng các phần tử của S .

Lời giải

ĐS: -7

Khi $x \in [-1; 3] \Rightarrow f(x) \in [0; 4]$. Đặt $f(x) = t \in [0; 4]$.

Khi đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow h(t) = |t^2 - 2t + m|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 4]$ bằng 8

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(t) \leq 8, \forall t \in [0; 4] \\ \exists t_0 \in [0; 4]: f(t_0) = 8 (*) \end{cases}$$

Với mọi $t \in [0; 4]$, ta có: $|t^2 - 2t + m| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq t^2 - 2t + m \leq 8$

$$\Leftrightarrow -t^2 + 2t - 8 \leq m \leq -t^2 + 2t + 8 \Leftrightarrow \max_{[0;4]}(-t^2 + 2t - 8) \leq m \leq \min_{[0;4]}(-t^2 + 2t + 8) \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 0.$$

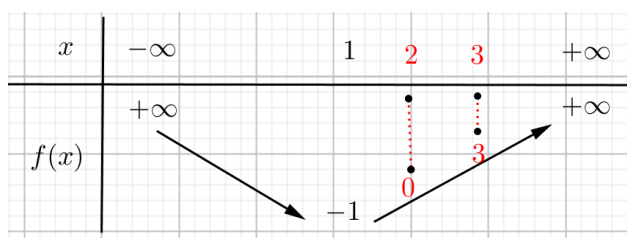
Đồng thời từ (*) suy ra $\begin{cases} m = 0 \\ m = -7 \end{cases}$. Vậy tổng các phần tử của S là -7 .

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(2 + \sin x) + m|$ bằng 2023?

Lời giải

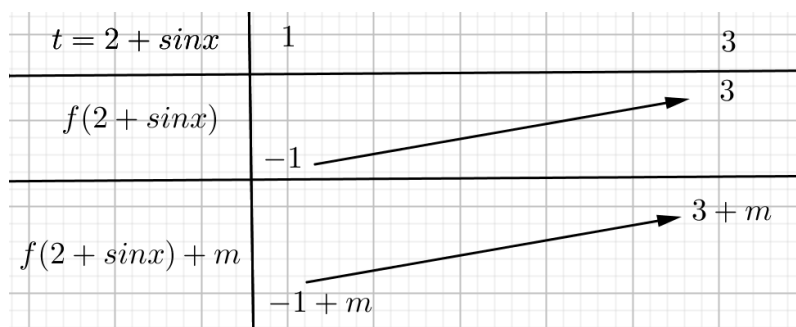
ĐS: 2

+ Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$



+ Xét hàm số $g(x) = f(2 + \sin x) + m$. Đặt $t = 2 + \sin x$, khi đó $1 \leq t \leq 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có, bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.



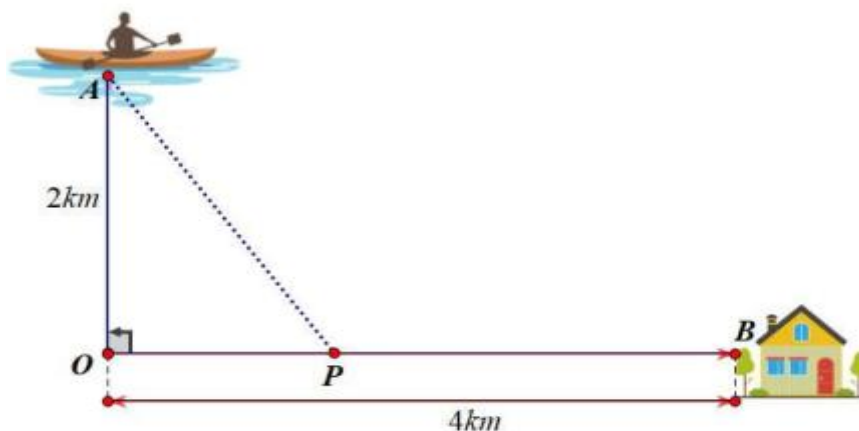
+ Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $|g(x)|$ có thể là $|-1 + m|$ hoặc $|3 + m|$

* Trường hợp 1: $|-1 + m| = 2023 \Rightarrow \begin{cases} -1 + m = 2023 \\ -1 + m = -2023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2024 \\ m = -2022 \end{cases}$. Thử lại $m = -2022$ thỏa mãn.

* Trường hợp 2: $|3 + m| = 2023 \Rightarrow \begin{cases} 3 + m = 2023 \\ 3 + m = -2023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2020 \\ m = -2026 \end{cases}$. Thử lại $m = 2020$ thỏa mãn.

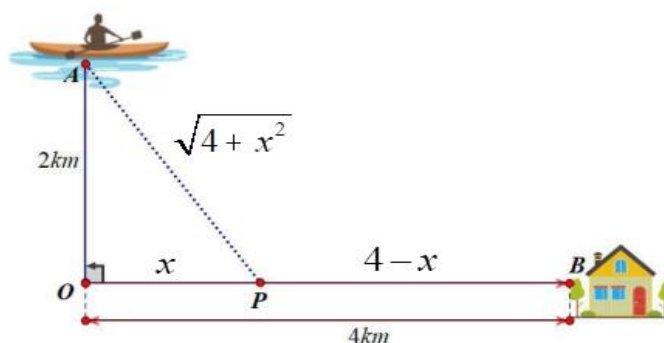
Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -2022$ và $m = 2020$.

Câu 34: Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2km , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4km . Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc 6m/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10km/h . Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



Lời giải

ĐS: 40 phút



Đặt $OP = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow BP = 4 - x$; $AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10} \text{ (h)}. \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}.$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

BBT:

x	0	$\frac{3}{2}$	4
$t'_{(x)}$		0	
	–		+
$t(x)$			

$\searrow \quad \nearrow$
 $\frac{2}{3}$

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{\min} = \frac{2}{3}(h) = \frac{2}{3}.60(\text{phút}) = 40 \text{ phút}.$$